NUEJ
NARESUAN UNIVERSITY
ENGINEERING JOURNAL

การประมาณพารามิเตอร์สำหรับแบบจำลองความผันผวนเชิงเฟ้นสุ่มด้วยขั้นตอนวิธี EM
Parameter Estimation for the Stochastic Volatility Model using the EM Algorithm

ธนภัทร เอี่ยมตาล[1] และ ธนิต มาลากร[2*]

Thanapat Iamtan[1], Tanit Malakorn[2*]

[1]นิสิตปริญญาเอก สาขาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร E-mail: i.thanapat@yahoo.com

[2*]ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้าและคอมพิวเตอร์ คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร E-mail: tanitm@nu.ac.th

บทคัดย่อ

งานวิจัยฉบับนี้ศึกษาการประยุกต์ใช้ขั้นตอน วิธี Expectation-Maximization Algorithm (EM) ในการประมาณพารามิเตอร์ของแบบจำลองความผันผวนเชิงเฟ้นสุ่ม จากการทดลองพบว่า การใช้วิธีมอนติคาร์โลในขั้นตอนวิธี EM ให้พารามิเตอร์มีค่าใกล้เคียงกับการใช้วิธีคาลมานโดยพารามิเตอร์ที่ได้มีค่าไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญที่ระดับ 0.05 เมื่อเทียบกับพารามิเตอร์จริง จากนั้นจึงนำขั้นตอนวิธี EM ร่วมกับทั้งวิธีมอนติคาร์โลและวิธีคาลมานมาใช้ในการประมาณหาพารามิเตอร์ของแบบจำลองความผันผวนเชิงเฟ้นสุ่ม โดยใช้อัตราแลกเปลี่ยนเงินตราต่างประเทศ 5 อัตราเป็นกรณีศึกษา แบบจำลองที่ได้สามารถนำมาใช้ในการพยากรณ์ค่าความผันผวนซึ่งเป็นตัวแปรต้นในการคำนวณมูลค่าของตราสารสิทธิที่มีอัตราแลกเปลี่ยนเป็นสินทรัพย์อ้างอิงได้

คำสำคัญ: การประมาณพารามิเตอร์, ความผันผวนเชิงเฟ้นสุ่ม,ขั้นตอนวิธี EM, วิธีคาลมาน, วิธีมอนติคาร์โล.

Abstract

This paper presents the application of the Expectation-Maximization Algorithm (EM) in estimating the parameters of the stochastic volatility model. The experimental results showed that the parameters computed by the Monte Carlo method and by the Kalman method in the EM algorithm are slightly different at the 0.05 significance level compared to the true parameters. We then applied the EM algorithm coupled with the Monte Carlo method and the Kalman method to estimate the parameters of the stochastic volatility model using 5 foreign exchange rates as a case study.

The proper model can be used to forecast the volatility of the foreign exchange rate which is one major variable in calculating the value of the options having the exchange rate as an underlying asset.

Keywords: Parameter Estimation, Stochastic Volatility, EM Algorithm, Kalman Method, Monte Carlo Method.

1. บทนำ

ในงานด้านการจัดการโครงการทางวิศวกรรมขนาดใหญ่ต้องมีความเกี่ยวข้องกับการบริหารการเงินแทบทั้งสิ้นการบริหารความเสี่ยงที่เหมาะสมจะช่วยลดความเสี่ยงจากการขาดทุนของโครงการได้เป็นอย่างดี วิธีการหนึ่งของการบริหารความเสี่ยงคือการซื้อสัญญาซื้อขายล่วงหน้า ได้แก่ ฟิวเจอร์ส (Futures) หรือตราสารสิทธิ (Options) เพื่อเป็นการป้องกันการเปลี่ยนแปลงของราคาในอนาคต รวมทั้งสามารถรับประกันได้ว่าจะมีการส่งมอบสินทรัพย์อ้างอิงได้ภายในช่วงเวลาที่กำหนด

การซื้อขายฟิวเจอร์สหรือตราสารสิทธิในประเทศไทยสามารถทำได้ในตลาดสัญญาซื้อขายล่วงหน้า (TFEX) โดยสินทรัพย์อ้างอิงที่ทำการซื้อขายได้ในตลาดดังกล่าว ได้แก่ ดัชนีราคาหลักทรัพย์ หลักทรัพย์ อัตราดอกเบี้ย ทองคำ และ น้ำมัน ทั้งนี้มีเพียงดัชนีราคาหลักทรัพย์ใน SET 50 เท่านั้นที่มีการซื้อขายแบบตราสารสิทธิได้ในขณะนี้ [1]

การคำนวณหามูลค่าที่เหมาะสมของฟิวเจอร์สค่อนข้างง่าย ในขณะที่การคำนวณหามูลค่าที่เหมาะสมของตราสารสิทธิมีความยุ่งยากซับซ้อน ต้องอาศัยสูตรแบลค์-โชวส์ [2,3] (Black-Scholes formula) ซึ่งเป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเฟ้นสุ่ม การพัฒนาสูตรแบลค์-โชวส์ในช่วงแรกสมมติให้ค่าความผันผวน (volatility) ของสินทรัพย์อ้างอิงเป็นค่าคงที่ σ ต่อมามีการค้นพบว่าค่าความผันผวนมีการแปรเปลี่ยนตามเวลา σ_k ดังนั้นเพื่อให้การคำนวณหามูลค่าที่เหมาะสมของตราสารสิทธิมี

สำเนาถูกต้อง

ความแม่นยำมากขึ้นจึงจำเป็นต้องสร้างแบบจำลองสำหรับความผันผวนดังกล่าว

แบบจำลองที่ใช้ในงานวิจัยนี้คือแบบจำลองความผันผวนเชิงเฟ้นสุ่ม (Stochastic volatility model: SV) โดยใช้อัตราแลกเปลี่ยนเงินตราต่างประเทศต่อสกุลเงินบาทไทยที่สำคัญ 5 อัตรา ได้แก่สกุลเงินดอลลาร์สหรัฐ (USD) สกุลเงินปอนด์อังกฤษ (GBP) สกุลเงินยูโร (EUR) สกุลเงินหยวนจีน (CNY) และสกุลเงินดอลลาร์สิงคโปร์ (SGD) มาเป็นกรณีศึกษา เนื่องจากตราสารสิทธิที่มีอัตราแลกเปลี่ยนเงินตราต่างประเทศเป็นสินทรัพย์อ้างอิงมีโอกาสที่จะเปิดทำการซื้อขายได้ในประเทศไทย

สิ่งสำคัญในการสร้างแบบจำลองคือการประมาณพารามิเตอร์ของแบบจำลองโดยอาศัยข้อมูลที่ได้จากการเก็บตัวอย่าง งานวิจัยชิ้นนี้เลือกใช้ขั้นตอนวิธี EM (EM algorithm) ที่ถูกพัฒนาขึ้นโดย Dempster et al. [4] ในปี ค.ศ. 1977 ในการประมาณพารามิเตอร์โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อให้ฟังก์ชันควรจะเป็น (Likelihood function) มีค่าสูงสุด

ขั้นตอนวิธี EM เป็นวิธีทำซ้ำประกอบด้วย 2 ขั้นตอนย่อย นั่นคือขั้นตอน E (Expectation step) ซึ่งเป็นขั้นตอนในการหาค่าคาดหมายความควรจะเป็นแบบสมบูรณ์ (Complete likelihood) เมื่อเทียบกับการแจกแจงปรับเรียบ (Smooth distribution) และขั้นตอน M (Maximization step) ซึ่งเป็นขั้นตอนในการหาพารามิเตอร์เพื่อทำให้ฟังก์ชันควรจะเป็นมีค่าสูงสุด

เมื่อนำขั้นตอนวิธี EM มาประยุกต์ใช้ในการประมาณหาพารามิเตอร์ของแบบจำลอง SV ซึ่งบรรยายในรูปแบบปริภูมิสถานะ จึงจำเป็นต้องทำการประมาณตัวแปรสถานะปรับเรียบ x_k^s ที่ได้จากการแจกแจงปรับเรียบเพื่อนำมาคำนวณหาฟังก์ชันควรจะเป็นแบบสมบูรณ์ ในกรณีของแบบจำลองเชิงเส้นที่มีการแจกแจงแบบปกติ นิยมเลือกใช้วิธีคาลมาน (Kalman Method : KM) ซึ่งเป็นการทำงานร่วมกันระหว่างตัวกรอง คาลมาน (Kalman filter : KF) และตัวปรับเรียบคาลมาน (Kalman smoother : KS) ในการประมาณ x_k^s เนื่องจากวิธี KM จัดได้ว่าเป็นวิธีการประมาณเหมาะที่สุด (Optimal estimation) [5,6] ซึ่งทำให้ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยระหว่างตัวแปรสถานะจริงและตัวแปรสถานะที่ประมาณขึ้นมีค่าต่ำสุด นอกจากนี้วิธี KM ยังมีความเรียบง่ายและมีผลเฉลยในรูปแบบปิด (Closed form)

สำหรับแบบจำลองไม่เชิงเส้นหรือแบบจำลองที่มีการแจกแจงแบบอื่นที่ไม่ใช่การแจกแจงปกติ การใช้วิธี KM ในขั้นตอนวิธี EM จะนำไปสู่ความควรจะเป็นเสมือนสูงสุด (Quasi maximum likelihood) แทน [7,8] ด้วยเหตุนี้วิธีมอนติคาร์โล (Monte Carlo method : MCM) ซึ่งอาศัยวิธีการแก้ปัญหาแบบศึกษาสำนึก (Heuristic approach) จึงเข้ามามีบทบาทในการประมาณ x_k^s แทนวิธี KM โดยใช้หลักการชักตัวอย่างจากฟังก์ชันการแจกแจง หาค่าถ่วงน้ำหนักพร้อมทำการปรับตัวอย่างใหม่ ทั้งนี้ตัวอย่างที่ได้จากการชักตัวอย่างนิยมเรียกว่าอนุภาค (Particle) ด้วยเหตุนี้ตัวกรองและตัวปรับเรียบที่ถูกออกแบบด้วยวิธี MCM จึงเรียกว่าตัวกรองอนุภาค (Particle Filter : PF) และตัวปรับเรียบอนุภาค (Particle Smoother : PS) ตามลำดับ

วัตถุประสงค์ของงานวิจัยนี้คือการประมาณหาพารามิเตอร์ในแบบจำลอง SV จากข้อมูลที่สร้างขึ้นด้วยขั้นตอนวิธี EM โดยใช้ทั้งวิธี KM และวิธี MCM ในการประมาณตัวแปรสถานะปรับเรียบ x_k^s จากนั้นจึงนำมาประยุกต์ใช้ประมาณพารามิเตอร์ในแบบจำลอง SV ของอัตราแลกเปลี่ยนเงินตราต่างประเทศทั้ง 5 อัตรา

2. แบบจำลองความผันผวนเชิงเฟ้นสุ่ม

ให้ R_k เป็นอัตราแลกเปลี่ยน ณ เวลาที่ k และให้ r_k เป็น ผลตอบแทนแบบลอการิทึมของ R_k นั่นคือ $r_k = \log\left(\frac{R_k}{R_{k-1}}\right)$ ซึ่งสอดคล้องกับแบบจำลอง SV ที่นำเสนอโดย Taylor [9] ดังนี้

$$r_k = \sigma_k \varepsilon_k, \quad \varepsilon_k \sim \mathcal{N}(0,1) \tag{1}$$

เมื่อ σ_k คือความผันผวนของ R_k โดยที่ σ_k^2 มีการแจกแจงเป็นแบบปกติเชิงลอการิทึม (Log-normally distribution) นั่นคือ ต้องมีตัวแปรสุ่ม x_k ที่มีการแจกแจงแบบปกติโดยที่ $x_k = \log \sigma_k^2$ ดังนั้นแบบจำลองในสมการที่ (1) จึงเขียนใหม่ได้เป็น

$$r_k = \exp\left(\tfrac{x_k}{2}\right)\varepsilon_k \tag{2}$$

โดยทั่วไปนิยมกำหนดให้ x_k สอดคล้องสมการการถดถอยอัตตะ (Autoregression) AR (1) ที่มีสัญญาณรบกวนแบบปกติดังนี้

$$x_k = \phi x_{k-1} + c + w_k, \; w_k \sim \mathcal{N}(0,Q) \tag{3}$$

โดยที่ $|\phi| < 1$ และ c เป็นค่าคงที่

เพื่อกำจัดค่าคงที่ c ออกจากสมการที่ (3) จึงแทรก β เข้าไปในสมการที่ (2) ดังนั้นแบบจำลอง SV จึงเขียนใหม่ได้เป็น

$$\Sigma_{NL} := \begin{cases} x_k = \phi x_{k-1} + w_k \\ r_k = \beta \exp\left(\tfrac{x_k}{2}\right)\varepsilon_k \end{cases} \text{ เมื่อ } k = 1,\ldots,N \tag{4}$$

เนื่องจาก Σ_{NL} เป็นแบบจำลองแบบไม่เชิงเส้นซึ่งไม่สามารถประยุกต์ใช้วิธี KM ได้จึงทำการแปลงแบบจำลองดังกล่าวให้อยู่ในรูปแบบเชิงเส้นโดยอาศัยฟังก์ชันลอการิทึมจึงได้ว่า

$$\Sigma_L := \begin{cases} x_k = \phi x_{k-1} + w_k \\ y_k = \alpha + x_k + v_k \end{cases} \text{ เมื่อ } k = 1,\ldots,N \tag{5}$$

เมื่อ $y_k = \log r_k^2$, $\alpha = \log \beta^2 + E[\log \varepsilon_k^2]$ และ $v_k = \log \varepsilon_k^2 - E[\log \varepsilon_k^2]$

แม้ว่าแบบจำลองที่ได้จะเป็นแบบจำลองเชิงเส้นแต่ยังคงไม่สามารถประยุกต์ใช้วิธี KM ได้เนื่องจากผลจากการแปลงทำให้ v_k มีการแจกแจงแบบลอการิทึมไคกำลังสองที่มีค่ามัชฌิมเป็น

และมีความแปรปรวนเท่ากับ $0.5\pi^2$ อย่างไรก็ตามพบว่ามีงานวิจัยหลายชิ้นที่นำวิธี KM มาใช้กับแบบจำลองในสมการที่ (5) โดยสมมติให้ v_k มีการแจกแจงปกติที่มีค่ามัชฌิมและความแปรปรวนเป็น 0 และ $0.5\pi^2$ ตามลำดับเช่นในงานวิจัยของ [10-13] หากแต่พารามิเตอร์ที่คำนวณได้จะทำให้เกิดความควรจะเป็นเสมือนสูงสุดเท่านั้น

เพื่อช่วยแก้ปัญหาดังกล่าว วิธี MCM จึงถูกเลือกนำมาใช้แทนวิธี KM เนื่องจากวิธี MCM มีความยืดหยุ่นสูง อีกทั้งไม่อาศัยสมมติฐานของความเป็นเกาส์เซียนและ/หรือความเป็นเชิงเส้นของแบบจำลองอีกด้วย ในงานวิจัยนี้จึงเลือกตัวกรองปลุกเครื่อง (Bootstrap filter: BF) ร่วมกับตัวปรับเรียบอนุภาคแบบย้อนกลับ (Backward-simulation particle smoother: BS) ซึ่งได้พัฒนามาจาก PF และ PS มาใช้แทนวิธี KM ในการหาพารามิเตอร์ $\theta = (\phi, Q, \alpha)$ ของแบบจำลองเชิงเส้น Σ_L ดังเห็นได้จากในงานวิจัยของ [14-16]

3. วิธีคาลมาน

วิธี KM เป็นกระบวนการในการประมาณหาตัวแปรสถานะหรือตัวแปรแฝง (Latent variable) ของแบบจำลองเชิงเส้นที่มีการแจกแจงปกติ เพื่อให้สามารถประยุกต์ใช้วิธี KM กับแบบจำลอง Σ_L ในสมการที่ (5) ซึ่งการแจกแจงของ v_k เป็นแบบลอการิทึมไคกำลังสองจึงต้องประมาณการแจกแจงของ v_k ด้วยการแจกแจงปกติ นั่นคือ $v_k \sim \mathcal{N}(0, 0.5\pi^2)$

ในที่นี้สมมติให้ตัวแปรสถานะเริ่มต้นมีการแจกแจงปกติ $x_0 \sim \mathcal{N}(\mu_0^{f-}, P_0^{f-})$ และให้ $y_{1:N} = \{y_1, \ldots, y_N\}$ แทนเซตของชุดข้อมูล

3.1 ตัวกรองคาลมาน

KF เป็นกระบวนการเรียกซ้ำแบบไปข้างหน้าซึ่งประกอบด้วย 2 ขั้นตอนดังนี้

1. ขั้นตอนเริ่มต้น: เมื่อ $k = 0$ เป็นการกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นจากการแจกแจงก่อน (Prior distribution)

$$x_0 \sim \mathcal{N}(\mu_0^{f-}, P_0^{f-}) \tag{6}$$

2. ขั้นตอนการทำซ้ำ: เมื่อ $k = 1, \ldots, N$ เป็นการทำงานสลับกันระหว่างขั้นตอนการทำนายและขั้นตอนการปรับค่าดังนี้

ขั้นตอนการทำนาย (Prediction Step) เป็นการหาการแจกแจงการทำนาย

$$x_k^{f-} \sim p(x_k \mid y_{1:k-1}) = \mathcal{N}(\mu_k^{f-}, P_k^{f-}) \tag{7}$$

โดยที่

$$\mu_k^{f-} = \phi \mu_{k-1}^{f+} \tag{8}$$

$$P_k^{f-} = \phi^2 P_{k-1}^{f+} + Q \tag{9}$$

ขั้นตอนการปรับค่า (Update Step) เป็นการหาการแจกแจงการกรอง

$$x_k^{f+} \sim p(x_k \mid y_{1:k}) = \mathcal{N}(\mu_k^{f+}, P_k^{f+}) \tag{10}$$

โดยที่

$$K_k = P_k^{f-} / (P_k^{f-} + 0.5\pi^2) \tag{11}$$

$$\mu_k^{f+} = \mu_k^{f-} + K_k(y_k - \mu_k^{f-} - \alpha) \tag{12}$$

$$P_k^{f+} = (1 - K_k) P_k^{f-} \tag{13}$$

ทั้งนี้ตัวแปรสถานะการกรองคือ

$$\hat{x}_k^f = E[x_k \mid y_{1:k}] = \mu_k^{f+} \tag{14}$$

3.2 ตัวปรับเรียบคาลมาน

KS เป็นกระบวนการเรียกซ้ำแบบย้อนกลับโดยอาศัยค่าที่คำนวณได้จาก KF ซึ่งประกอบด้วย 2 ขั้นตอนดังนี้

1. ขั้นตอนสุดท้าย: เมื่อ $k = N$ เป็นการกำหนดการแจกแจงที่ได้มาจาก KF

$$x_N^s \sim p(x_N) = \mathcal{N}(\mu_N^{f+}, P_N^{f+}) = \mathcal{N}(\mu_N^s, P_N^s) \tag{15}$$

2. ขั้นตอนการทำซ้ำ: เมื่อ $k = N-1, \ldots, 0$ เป็นการคำนวณหาการแจกแจงปรับเรียบ

$$x_k^s \sim p(x_k \mid y_{1:N}) = \mathcal{N}(\mu_k^s, P_k^s) \tag{16}$$

โดยที่

$$J_k = \phi P_k^{f+} / (P_{k+1}^{f-}) \tag{17}$$

$$\mu_k^s = \mu_k^{f+} + J_k(\mu_{k+1}^s - \mu_{k+1}^{f-}) \tag{18}$$

$$P_k^s = P_k^{f+} + J_k^2(P_{k+1}^s - P_{k+1}^{f-}) \tag{19}$$

ทั้งนี้ตัวแปรสถานะการปรับเรียบคือ

$$\hat{x}_k^s = E[x_k \mid y_{1:N}] = \mu_k^s \tag{20}$$

4. วิธีมอนติคาร์โล

วิธี MCM อาศัยการแก้ปัญหาแบบศึกษาสำนึกโดยการชักตัวอย่างจากฟังก์ชันการแจกแจงและหาค่าถ่วงน้ำหนักเพื่อทำการประมาณปริมาณที่ต้องการทราบด้วยการหาค่าเฉลี่ยทางสถิติแทนการคำนวณดังเช่นในวิธี KM ในที่นี้จะนำเสนอ BF และ BS ซึ่งมีโครงสร้างการทำงานคล้ายคลึงกับ KF และ KS ตามลำดับโดยมีรายละเอียดดังนี้

4.1 ตัวกรองการปลุกเครื่อง

BF ได้ถูกพัฒนามาจาก PF ซึ่งประกอบด้วย 2 ขั้นตอนดังนี้

1. ขั้นตอนเริ่มต้น: เมื่อ $k = 0$ ทำการชักตัวอย่างอนุภาคเริ่มต้นจากการแจกแจงก่อน

$$x_0^{f(i)} \sim \mathcal{N}(\mu_0^f, P_0^f) \text{ เมื่อ } i = 1, \ldots, M \tag{21}$$

และให้ค่าถ่วงน้ำหนักเริ่มต้นของแต่ละอนุภาคเป็น

$$\omega_0^{f(i)} = 1/M \text{ เมื่อ } i = 1, \ldots, M \tag{22}$$

เมื่อ M คือจำนวนของอนุภาค

2. ขั้นตอนการทำซ้ำ: เมื่อ $k = 1, \ldots, N$ เป็นการทำงานสลับกันระหว่างขั้นตอนการทำนาย ขั้นตอนการหาค่าถ่วงน้ำหนักและขั้นตอนการปรับอนุภาคใหม่ดังนี้

<u>ขั้นตอนการทำนาย</u>เป็นการหาอนุภาคที่เวลาถัดไปโดยอาศัยสมการสถานะ นั่นคือ

$$x_k^{f(i)} = \phi x_{k-1}^{f(i)} + w_k^{f(i)} \text{ เมื่อ } i = 1,\ldots,M \qquad (23)$$

<u>ขั้นตอนการหาค่าถ่วงน้ำหนัก</u>เป็นการหาการแจกแจงแบบมีเงื่อนไขของสัญญาณออก นั่นคือ

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_k^{f(i)} &\sim p(y_k \mid x_k^{f(i)}) \\ &\propto \exp\left(\frac{\gamma_k}{2}\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\exp(\gamma_k)\right) \end{aligned} \qquad (24)$$

โดยที่ $\gamma_k = y_k - \alpha - x_k^{f(i)} + E\left[\log \varepsilon_k^2\right]$

จากนั้นจึงนำมาทำให้เป็นบรรทัดฐานเพื่อให้ผลรวมค่าถ่วงน้ำหนักมีค่าเป็น 1 ดังนี้

$$\omega_k^{f(i)} = \frac{\tilde{\omega}_k^{f(i)}}{\sum_{i=1}^{M} \tilde{\omega}_k^{f(i)}} \qquad (25)$$

<u>ขั้นตอนการปรับอนุภาคใหม่</u>เป็นขั้นตอนที่ใช้เพื่อกำจัดอนุภาค $x_k^{f(i)}$ ที่มีค่าถ่วงน้ำหนักน้อยมากออกไปแล้วนำอนุภาคที่มีค่าถ่วงน้ำหนักมากมาใส่แทนที่ซึ่งเป็นวิธีลดปัญหาการลดลง (Degeneracy problem)

ทั้งนี้ตัวแปรสถานะการกรองคำนวณได้จากผลรวมเชิงเส้นของอนุภาคการกรอง นั่นคือ

$$x_k^f = \sum_{i=1}^{M} \omega_k^{f(i)} x_k^{f(i)} \qquad (26)$$

4.2 ตัวปรับเรียบอนุภาคแบบย้อนกลับ

BS เป็นกระบวนการเรียกซ้ำแบบย้อนกลับโดยอาศัยค่าที่คำนวณได้จาก BF ซึ่งประกอบด้วย 2 ขั้นตอนดังนี้

1. ขั้นตอนสุดท้าย: เมื่อ $k = N$ ให้พิจารณาค่าถ่วงน้ำหนัก $\omega_N^{f(i)}$ เป็นความน่าจะเป็นในการเลือกอนุภาคการกรองที่ตำแหน่ง i มาเป็นอนุภาคการปรับเรียบที่ตำแหน่ง j นั่นคือ

$$x_N^{s(j)} = x_N^{f(i)} \text{ ด้วยความน่าจะเป็น } \omega_N^{f(i)} \qquad (27)$$

สำหรับทุกค่า $i, j = 1,\ldots,M$

2. ขั้นตอนการทำซ้ำ: เมื่อ $k = N-1,\ldots,0$ เป็นการคำนวณค่าถ่วงน้ำหนักใหม่ $\omega_k^{s(i)}$ จาก

$$\omega_k^{s(i)} \propto \omega_k^{f(i)} p(x_{k+1}^{s(j)} \mid x_k^{f(i)}) = \mathcal{N}(\phi x_k^{f(i)}, Q) \qquad (28)$$

เมื่อ $i, j = 1,\ldots,M$

จากนั้นจึงพิจารณาค่าถ่วงน้ำหนัก $\omega_k^{s(i)}$ ที่ได้เป็นความน่าจะเป็นในการเลือกอนุภาคการกรองที่ตำแหน่ง i ให้มาเป็น

$$x_k^{s(j)} = x_k^{f(i)} \text{ ด้วยความน่าจะเป็น } \omega_k^{s(i)} \qquad (29)$$

สำหรับทุกค่า $i, j = 1,\ldots,M$

ทั้งนี้ตัวแปรสถานะการปรับเรียบคำนวณได้จากผลรวมเชิงเส้นของอนุภาคการปรับเรียบ นั่นคือ

$$x_k^s = \sum_{i=1}^{M} \omega_k^{s(i)} x_k^{s(i)} \qquad (30)$$

5. ขั้นตอนวิธี EM

วิธีการกรองและการปรับเรียบในหัวข้อที่ผ่านมาต้องอาศัยสมมติฐานที่ว่าผู้ออกแบบทราบพารามิเตอร์ทุกตัวของแบบจำลอง อย่างไรก็ตามสิ่งที่ผู้ออกแบบทราบมีเพียงข้อมูลที่วัดได้เท่านั้น ด้วยเหตุนี้จึงจำเป็นต้องประมาณพารามิเตอร์ขึ้นมาเป็นลำดับแรก จากนั้นจึงทำการประมาณตัวแปรสถานะในลำดับถัดไป

เกณฑ์ในการชี้วัดถึงความแม่นยำในการประมาณพารามิเตอร์ที่เลือกใช้ในงานวิจัยนี้คือวิธีความควรจะเป็นสูงสุด (Maximum likelihood: ML) โดยอาศัยขั้นตอนวิธี EM โดยมีรายละเอียดดังนี้

ให้ θ แทนพารามิเตอร์ของระบบแล้ว ความควรจะเป็นของพารามิเตอร์แบบลอการิทึมคือ

$$\log p(y_{1:N} \mid \theta) := \mathcal{L}(\theta) \qquad (31)$$

วัตถุประสงค์ของวิธี ML คือการหา $\hat{\theta}^{ML}$ ที่ทำให้ $\mathcal{L}(\hat{\theta}^{ML})$ ในสมการที่ (26) มีค่าสูงสุด นั่นคือ

$$\hat{\theta}^{ML} = \arg\max_{\theta} \log p(y_{1:N} \mid \theta) \qquad (32)$$

โดยทั่วไปการคำนวณหาค่าเหมาะที่สุดข้างต้นต้องอาศัยวิธีเชิงตัวเลข Dempster et al. [1] จึงได้พัฒนาขั้นตอนวิธี EM เพื่อใช้ในการประมาณหา $\hat{\theta}^{ML}$ อย่างไรก็ตามขั้นตอนวิธี EM ไม่ได้คำนวณหาค่าเหมาะที่สุดดังในสมการที่ (32) โดยตรงหากแต่อาศัยการทำให้ขอบเขตล่างของ $\mathcal{L}(\theta)$ มีค่ามากขึ้นในแต่ละรอบของการทำซ้ำจึงส่งผลทำให้ $\mathcal{L}(\theta)$ มีค่ามากสูงขึ้นตามไปนั่นเอง

ดังนั้นในขั้นตอนวิธี EM สมการที่ (32) จึงเปลี่ยนเป็น

$$\hat{\theta}^{(k+1)} = \arg\max_{\theta} E[\ \mathcal{L}(\theta, \hat{\theta}^{(k)})] \qquad (33)$$

เมื่อ

$$\mathcal{L}\ (\theta, \hat{\theta}^{(k)}) = \log p(x_{0:N}^s, y_{1:N} \mid \theta) \qquad (34)$$

จากคุณสมบัติของมาร์คอฟจะได้ว่า

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\theta, \hat{\theta}^{(k)}) &= \log p(x_0^s \mid \theta) + \sum_{k=1}^{N} \log p(x_k^s \mid x_{k-1}^s, \theta) \\ &+ \sum_{k=1}^{N} \log p(y_k \mid x_k^s, \theta) \end{aligned} \qquad (35)$$

ดังนั้นขั้นตอนวิธี EM จึงนำมาสรุปไว้ดังนี้

*1. **ขั้นตอนเริ่มต้น***: กำหนดค่าเริ่มต้น $\hat{\theta}^{(0)}$

*2. **ขั้นตอนการทำซ้ำ***: เมื่อ $k = 1,\ldots,N$

ขั้นตอน E คำนวณหา $(\theta, \hat{\theta}^{(k)})$ ตามสมการที่ (34)

ขั้นตอน M คำนวณหา $\hat{\theta}^{(k+1)}$ ตามสมการที่ (33)

5.1 ขั้นตอนวิธี EM ร่วมกับวิธี KM

การประยุกต์ขั้นตอนวิธี EM ร่วมกับวิธี KM ในการประมาณพารามิเตอร์ $\theta = (\phi, Q, \alpha)$ ของแบบจำลอง Σ_L ในสมการที่ (5) ต้องพิจารณา v_k ให้มีการแจกแจงเป็นแบบปกติ

นั่นคือ $v_k \sim \mathcal{N}(0, 0.5\pi^2)$ ดังนั้น $\mathcal{L}(\theta, \hat{\theta}^{(k)})$ ในสมการที่ (35) จึงเขียนได้เป็น

$$\mathcal{L}(\theta, \hat{\theta}^{(k)}) = -\frac{1}{2}\log P_0 - \frac{1}{2}\frac{(x_0^s - \mu_0)^2}{P_0} - \frac{1}{2}N\log Q - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\frac{(x_k^s - \phi x_{k-1}^s)^2}{Q} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\frac{(y_k - x_k^s - \alpha)^2}{0.5\pi^2} - C \quad (36)$$

โดยที่ C เป็นผลรวมของพจน์ของค่าคงที่ซึ่งไม่มีผลต่อการคำนวณหาค่าสูงสุด

จากนั้นจึงคำนวณหา $\hat{\theta}$ ที่ทำให้ $E[\mathcal{L}(\theta, \hat{\theta}^{(k)})]$ มีค่าสูงสุดโดยการหาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับพารามิเตอร์แต่ละตัวที่ต้องการทราบจึงได้ว่า

$$\hat{\phi} = \frac{\sum_{k=1}^{N}\left[\mu_k^s \mu_{k-1}^s + P_{k,k-1}\right]}{\sum_{k=1}^{N}\left[(\mu_{k-1}^s)^2 + P_{k-1}\right]} \quad (37)$$

$$\hat{Q} = \frac{\sum_{k=1}^{N}\left[(\mu_k^s)^2 + P_k\right]}{N} - \frac{\sum_{k=1}^{N}\hat{\phi}\left[\mu_k^s \mu_{k-1}^s + P_{k,k-1}\right]}{N} \quad (38)$$

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left[y_k - \mu_k^s\right] \quad (39)$$

โดยที่ $\mu_k^s = E[x_k^s \mid y_{1:N}]$, $P_k = E\left[(x_k^s - \mu_k^s)^2 \mid y_{1:N}\right]$ และ $P_{k,l} = E\left[(x_k^s - \mu_k^s)(x_l^s - \mu_l^s) \mid y_{1:N}\right]$

5.2 ขั้นตอนวิธี EM ร่วมกับวิธี MCM

เนื่องจาก v_k ของแบบจำลองในสมการที่ (5) มีการแจกแจกแบบลอการิทึมไคกำลังสอง ดังนั้น$\mathcal{L}(\theta, \hat{\theta}^{(k)})$ในสมการที่ (35) จึงเขียนได้เป็น

$$\mathcal{L}(\theta, \hat{\theta}^{(k)}) = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}\left\{-\frac{1}{2}\log P_0 - \frac{1}{2}\frac{(x_0^s - \mu_0)^2}{P_0} - \frac{1}{2}N\log Q - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\frac{(x_k^s - \phi x_{k-1}^s)^2}{Q} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}[\exp(\gamma_k) - \gamma_k] - C\right\} \quad (40)$$

โดยที่ C เป็นผลรวมของพจน์ของค่าคงที่ซึ่งไม่มีผลต่อการคำนวณหาค่าสูงสุด

จากนั้นจึงคำนวณหา $\hat{\theta}$ ที่ทำให้ $E[\mathcal{L}(\theta, \hat{\theta}^{(k)})]$ มีค่าสูงสุดโดยการหาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับพารามิเตอร์แต่ละตัวที่ต้องการทราบจึงได้ว่า

$$\hat{\phi} = \frac{\sum_{k=1}^{N}E\left[x_k^s x_{k-1}^s \mid y_{1:N}\right]}{\sum_{k=1}^{N}E\left[(x_{k-1}^s)^2 \mid y_{1:N}\right]} \quad (41)$$

$$\hat{Q} = \frac{\sum_{k=1}^{N}E\left[(x_{k+1}^s - \hat{\phi}x_k^s)^2 \mid y_{1:N}\right]}{N} \quad (42)$$

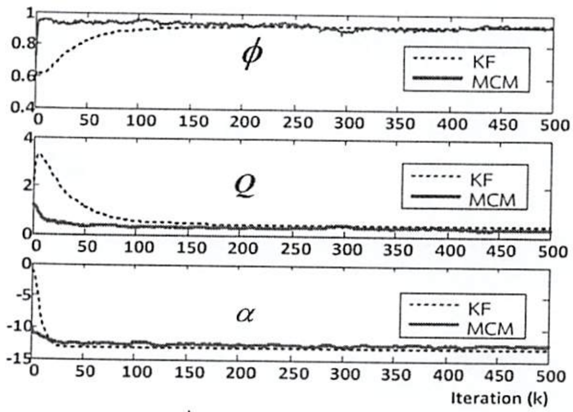
$$\hat{\alpha} = \log\left[\frac{\sum_{k=1}^{N}E\left[\exp\left(y_k - \mu_k^s + E\left[\log\varepsilon_k^2\right]\right) \mid y_{1:N}\right]}{N}\right] \quad (43)$$

6. ผลการทดลอง

ในส่วนนี้เป็นการทดลองเพื่อคำนวณหาพารามิเตอร์ของแบบจำลอง SV ในสมการที่ (5) โดยใช้ชุดข้อมูล 2 ชนิด คือ 1. ข้อมูลที่สร้างขึ้น (Simulated Data) ด้วยแบบจำลอง SV เพื่อใช้ในการทดสอบโปรแกรมที่ได้พัฒนาขึ้นและ 2. ข้อมูลของอัตราแลกเปลี่ยนเงินตราต่างประเทศ 5 อัตรา

6.1 ข้อมูลที่สร้างขึ้น

ในส่วนนี้เป็นการทดสอบความแม่นยำของโปรแกรมที่ได้พัฒนาขึ้นโดยเริ่มจากการสร้างข้อมูลด้วยสมการที่ (5) เมื่อกำหนดค่าพารามิเตอร์ ϕ, Q, α เป็น 0.9, 0.5 และ -13.5 ตามลำดับ จากนั้นจึงนำข้อมูลที่ได้ป้อนเข้าสู่โปรแกรมโดยทำการทดลองซ้ำทั้งหมด 30 ครั้งเพื่อหาค่าเฉลี่ยของพารามิเตอร์จากการทดลองพบว่าพารามิเตอร์ที่ได้จากการประมาณด้วยวิธี KM และวิธี MCM ลู่เข้าใกล้ค่าพารามิเตอร์จริงดังรูปที่ 1 โดยเส้นประจุดและเส้นทึบแสดงแนววิถีของพารามิเตอร์ที่ได้จากวิธี KM และวิธี MCM ตามลำดับ



รูปที่ 1 การลู่เข้าของพารามิเตอร์

จากนั้นจึงทำการทดสอบทางสถิติด้วยวิธีการทดสอบแบบที (t-test) พบว่าพารามิเตอร์ที่ได้จากวิธีการทั้งสองให้คำตอบที่ไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญที่ระดับ 0.05 เมื่อเทียบกับพารามิเตอร์จริงซึ่งผลทดลองที่ได้แสดงไว้ในตาราง ที่ 1

ตารางที่ 1 ค่าพารามิเตอร์ที่ได้จากการทดสอบ

วิธีการ	ϕ	Q	α
MCM	0.8958	0.4884	-13.5286
(S.D.)	(0.0210)	(0.1017)	(0.0990)
P-Value	0.2806	0.5354	0.3848
KM	0.8992	0.4907	-13.4962
(S.D.)	(0.0401)	(0.2154)	(0.3999)
P-Value	0.9109	0.8149	0.9591

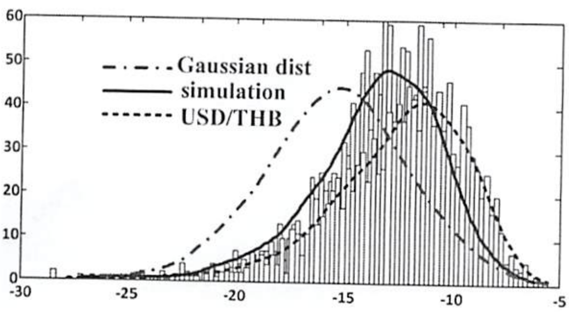
6.2 ข้อมูลอัตราแลกเปลี่ยน

ในงานวิจัยนี้เลือกใช้อัตราแลกเปลี่ยนเงินตราระหว่างประเทศที่สำคัญ 5 อัตรามาหาพารามิเตอร์โดยใช้ทั้งวิธี MCM และวิธี KM โดยเก็บข้อมูลตั้งแต่วันที่ 4 ม.ค. 2554 จนถึง 29 เม.ย. 2559 ค่าพารามิเตอร์ที่ประมาณได้แสดงไว้ในตารางที่ 2

ตารางที่ 2 ค่าพารามิเตอร์ของอัตราแลกเปลี่ยน 5 อัตรา

สกุลเงิน	วิธีการ	ϕ	Q	α
USD	MCM	0.7959	0.1793	-13.3360
	KM	0.3263	0.2886	-13.3625
GBP	MCM	0.6455	0.1893	-12.1771
	KM	0.4282	0.2851	-12.1362
EUR	MCM	0.8362	0.2022	-11.9219
	KM	0.9232	0.0852	-11.8932
CNY	MCM	0.5627	0.4125	-13.3066
	KM	0.5964	0.3413	-13.3292
SGD	MCM	0.7456	0.3338	-13.4691
	KM	0.3685	1.6690	-13.3897

จากผลการทดลองพบว่าพารามิเตอร์ที่ได้จากวิธี KM ค่อนข้างแตกต่างจากค่าที่ได้ด้วยวิธี MCM นั่นเป็นเพราะผลตอบแทนของอัตราแลกเปลี่ยนเงินตราที่นำมาใช้ในการทดลองมีฟังก์ชันการแจกแจงที่ต่างไปจากการแจกแจงปกติค่อนข้างมากดังแสดงไว้ในรูปที่ 2 ในขณะที่การประมาณด้วยด้วยวิธี MCM อาศัยการใช้อนุภาคร่วมกับค่าถ่วงน้ำหนักในการประมาณการแจกแจงจริงของข้อมูลจึงทำให้ค่าพารามิเตอร์ที่ประมาณได้มีค่าความควรจะเป็นมากกว่าวิธี KM



รูปที่ 2 การแจกแจงของข้อมูล

7. สรุปผลการทดลอง

งานวิจัยฉบับนี้นำเสนอวิธีการประมาณหาค่าพารามิเตอร์ของแบบจำลอง SV ในรูปแบบเชิงเส้นโดยใช้วิธี MCM และวิธี KM ในขั้นตอนวิธี EM จากผลการทดลองพบว่าค่าพารามิเตอร์ที่ได้จากวิธีการทั้งสองไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญที่ระดับ 0.05 เมื่อเทียบกับพารามิเตอร์จริง จากนั้นจึงนำทั้งวิธี MCM และวิธี KM มาประยุกต์ใช้ในการหาพารามิเตอร์ของแบบจำลอง SV โดยใช้อัตราแลกเปลี่ยนเงินตราต่างประเทศต่อสกุลเงินบาทไทยที่สำคัญ 5 อัตราเป็นกรณีศึกษา ผลการทดลองพบว่าพารามิเตอร์ที่ได้จากทั้ง 2 วิธีมีค่าเฉลี่ยต่างกันนั่นเป็นเพราะวิธี KM อาศัยการประมาณการแจกแจงของข้อมูลจริงด้วยการแจกแจงปกติ ในขณะที่วิธี MCM ใช้การประมาณการแจกแจงจริงของข้อมูลด้วยอนุภาคและค่าถ่วงน้ำหนัก

8. เอกสารอ้างอิง

[1] Thailand Futures Exchange. Retrieved from http://www.tfex.co.th/th/products/set50futures-spec.html.

[2] Merton, R. C. (1973). The theory of rational option pricing. *Bell Journal of Economics, 4*, 141-183.

[3] Black, F., & Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economics, 81*, 637–654.

[4] Dempster, A. P., Laird, N. M., & Rubin, D. B. (1977). Maximum likelihood from incomplete data via EM algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society, 39*(1), 1-38.

[5] Anderson, B. D. O., & Moore, J. B. (2005). *Optimal Filtering*. New York, USA: Dover.

[6] Faragher, R. (2012). Understanding the basis of Kalman filter via a simple and intuitive derivation. *IEEE Signal Processing Magazine, 5*(29), 128–132.

[7] Fridman, M., & Harris, L. (1998). A maximum likelihood approach for non-Gaussian stochastic volatility models. *Journal of Business and Economics Statistics, 1*(3), 284-291.

[8] Breidt, F. J., & Carriquiry A. L., (1996). *Improvement quasi maximum likelihood estimation for stochastic volatility models*, New York, USA: Springer.

[9] Taylor, S. J. (1994). *Financial returns modeled by the product of two stochastic processes a study of daily sugar prices 1961–79. In Time Series Analysis: Theory and Practice* (vol. 1). New York, USA: Elsevier Science Publishing.

[10] Ruiz, E. (1994). Quasi-maximum likelihood estimation of stochastic volatility models. *Journal of Econometrics, 63*, 289-306.

[11] Chatterjee, S. (2005). Application of the Kalman filter for estimating continuous time term structure models - the case of UK and Germany. Retrieved from: http://www.gla.ac.uk/media/media_22193_en.pdf.

[12] Racicot, F. E., & Theoret, R. (2010). Forecasting stochastic volatility using the Kalman filter: An application to Canadian interest rates and price-earning ratio. *AESTI-MATIO, the IEB International Journal of Finance, 1*, 28-47.

[13] Shephard, N., & Xiu D. (2012). Econometric analysis of multivariate realized QML: estimation of the covariation of equity prices under asynchronous trading. Retrieved from: http://faculty.chicagobooth.edu/dacheg.xiu/research/KFQMLE.pdf.

สำเนาถูกต้อง

[14] Malakorn, T., & Iamtan, T. (2015). Parameter Estimation of Stochastic Volatility Models using Particle Method and EM Algorithm. *Proceeding of the 38th Electrical Engineering Conference*. Woraburi Hotel and Resort, Phra Nakhon Si Ayutthaya.

[15] Kim, J., & Stoffer, D. S. (2006). Fitting stochastic volatility models in the presence of irregular sampling via Particle Methods and the EM algorithm. *Journal of Time Series Analysis*, *29*(5), 811-833.

[16] Nkemnole, E. B., & Abass, O. (2015). A t-distribution based particle filter for univariate and multivariate stochastic volatility models. *Journal of the Nigerian Mathematical Society*, *34*(2), 227-242.

9. ประวัติผู้วิจัย

ธนิต มาลากร สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาเอกในสาขาวิศวกรรมไฟฟ้าจาก Virginia Tech (VPI & SU) ประเทศสหรัฐอเมริกาในปี พ.ศ. 2546 ปัจจุบันดำรงตำแหน่งรองศาสตราจารย์ประจำสาขาวิศวกรรมไฟฟ้าคณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร งานวิจัยที่สนใจได้แก่ คณิตศาสตร์การเงิน (Mathematical Finance) ทฤษฎีหลายมาตราส่วน (Multiscale theory) ระบบเชิงเส้นหลายมิติ (Multidimensional linear system)

ธนภัทร เอี่ยมตาล สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาตรี สาขาวิศวกรรมไฟฟ้าสื่อสารและระดับปริญญาโท สาขาวิศวกรรมการจัดการใน ปี พ.ศ. 2549 และ พ.ศ. 2552 ตามลำดับ ปัจจุบันกำลังศึกษาในระดับปริญญาเอกสาขาวิศวกรรมไฟฟ้า มหาวิทยาลัยนเรศวร งานวิจัยที่สนใจได้แก่ การค้นหาแบบศึกษาสำนึก (Heuristic search) ตัวกรองและกระบวนการเชิงเฟ้นสุ่ม (Filter and Stochastic process)

สำเนาถูกต้อง